

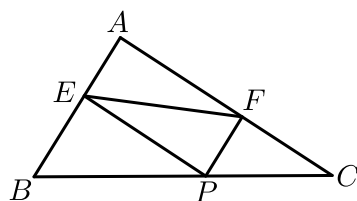
第2讲最值问题

一、最值问题

1. 垂线段最短

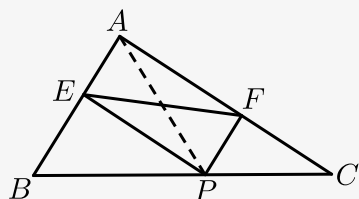
典题精练

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 3$ ， $AC = 4$ ， $BC = 5$ ， P 为边 BC 上一动点， $PE \perp AB$ 于 E ， $PF \perp AC$ 于 F ，则 EF 的最小值为 _____ .



【答案】 2.4

【解析】 连接 AP ，



$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 3$ ， $AC = 4$ ， $BC = 5$ ，

$\therefore AB^2 + AC^2 = BC^2$ ，

即 $\angle BAC = 90^\circ$ ，

又 $\because PE \perp AB$ 于 E ， $PF \perp AC$ 于 F ，

$\therefore$ 四边形 $AEPF$ 是矩形，

$\therefore EF = AP$ ，

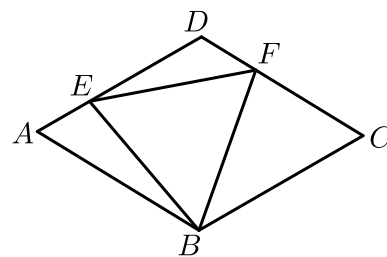
$\therefore AP$ 的最小值即为直角 $\triangle ABC$ 斜边上的高，即2.4，

$\therefore EF$ 的最小值为2.4，

故答案为：2.4 .

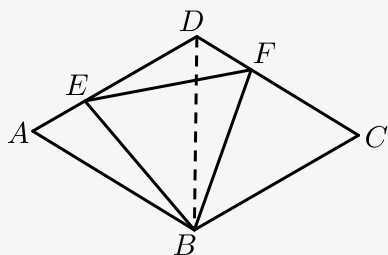
【标注】 【知识点】 矩形的判定-从四边形

2. 如图，边长为 a 的菱形 $ABCD$ 中， $\angle DAB = 60^\circ$ ， E 是 AD 上异于 A 、 D 两点的一个动点， F 是 CD 上的动点，且满足 $AE + CF = a$ ，则 EF 的最小值为 _____ .



【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

【解析】 连结 BD ，可证 $\triangle BED \cong \triangle BFC$ ，故 $\triangle BEF$ 为正三角形，故 $EF = BE$ ，根据垂线段最短，当 $BE \perp AD$ 时， BE 最短，这时 E 为 AD 中点，因此， EF 最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

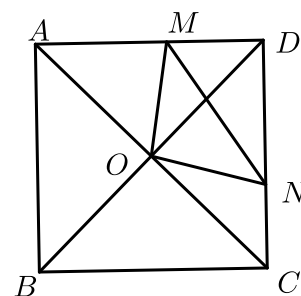


【标注】 【知识点】菱形的性质

【知识点】垂线段最短

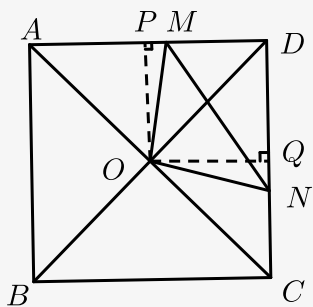
【能力】推理论证能力

3. 如图，以边长为2的正方形 $ABCD$ 的中心 O 为端点，引两条互相垂直的射线，分别与正方形的边交于 M 、 N 两点，则线段 MN 的最小值是 _____ .



【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】 过 O 作 AD 和 CD 的垂线，



可证 $\triangle MOP \cong \triangle NOQ(ASA)$,

则 $OM = ON$,

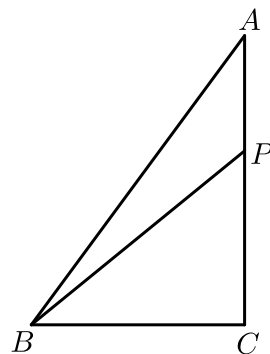
故 $MN = \sqrt{2}OM$,

当 OM 取最小值时, MN 最小,

$$MN_{\min} = \sqrt{2}OM_{\min} = \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \right) = \sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】等腰直角三角形的判定；垂线段最短

4. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 8$ ， $BC = 6$ ， P 为 AC 边上的一动点，以 PB ， PA 为边构造平行四边形 $APBQ$ ，则对角线 PQ 的最小值为（ ）。



A. 4

B. 6

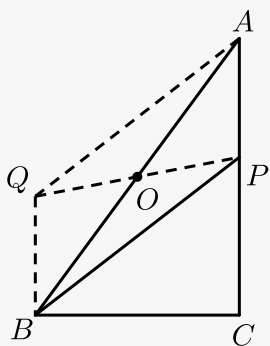
C. 8

D. 10

【答案】 B

【解析】 以 PB ， PA 为边构造平行四边形 $APBQ$ ，

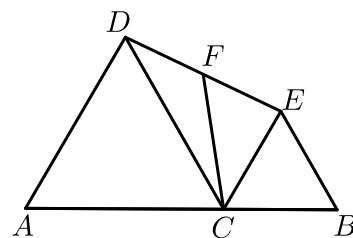
连接 PQ 与 AB 交于点 O ，



$\therefore$ 四边形 $APBQ$ 是平行四边形 ,
 $\therefore OP = \frac{1}{2}PQ$, $OA = \frac{1}{2}AB$,
 $\therefore$ 若使 PQ 最小 , 只需令 OP 最小 ,
 $\therefore$ 当 $OP \perp AC$ 时 , OP 最小 ,
 $\therefore OP \perp AC$, $\angle C = 90^\circ$,
 $\therefore \angle APO = \angle C = 90^\circ$,
 $\therefore OP \parallel BC$,
 $\therefore \triangle AOP \sim \triangle ABC$,
 $\frac{OP}{BC} = \frac{OA}{AB}$,
 $\frac{OP}{6} = \frac{1}{2}$,
 $OP = 3$,
 $\therefore PQ = 2OP = 2 \times 3 = 6$.
 故选 **B** .

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

5. 如图 , 已知 $AB = 6$, C 是线段 AB 上一动点 , 分别以 AC 、 CB 为边作等边三角形 ACD 和 BCE , 连接 DE , F 为 DE 中点 , 则 CF 的最小值是 _____ .



【答案】 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

【解析】 略

【标注】【知识点】等边三角形的性质

【知识点】垂线段最短

【能力】推理论证能力

2. 线段和差问题

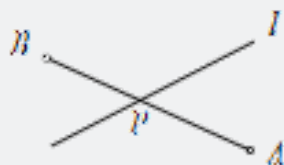
 教法备注

🔴 线段和最小

同侧



异侧



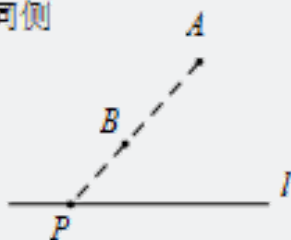
【作法】：①当点 A 和点 B 在直线 l 同侧时，作点 A 关于 l 对称的点 A' ，连接 A' 、 B ，与 l 的交点即为点 P 。

②当点 A 和点 B 在直线 l 异侧时，连接 A 、 B ，与 l 的交点即为点 P 。

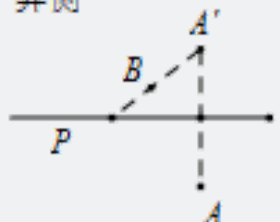
【理由】：两点之间，线段最短。

🔴 线段差最大

同侧



异侧



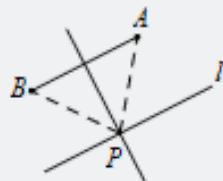
【作法】：①当点 A 和点 B 在直线同侧时，过点 A 、 B 作直线 AB ，交 l 于点 P 。

②当点 A 和点 B 在直线异侧时，作点 B 关于 l 对称的点 B' ，过点 A 、 B' 作直线 AB' 交 l 于点 P 。

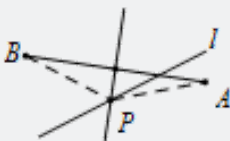
理由：三角形两边之差小于第三边。

🔴 线段差最小

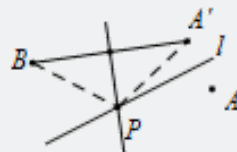
同侧



异侧



异侧

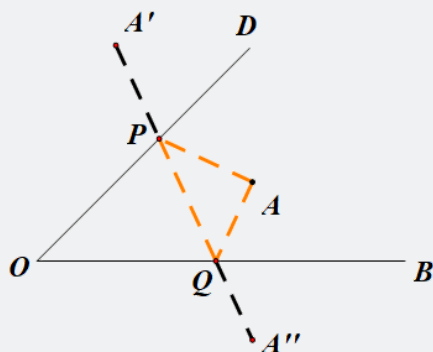


【作法】：连接 A 、 B ，作线段 AB 的垂直平分线，交 l 于点 P 。

🔴 三角形周长最小

如图，点 A 在锐角 $\angle DOB$ 的内部，在 OD 边上求作一点 P ，在 OB 边上求作一点 Q ，使 $\triangle PAQ$ 的周长最小（或者使得 $PA + QA$ 最小）。

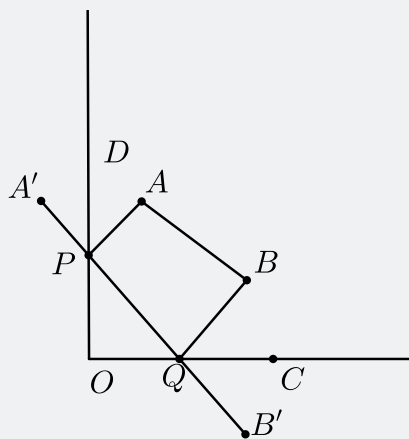
【作法】：作点 A 关于 OD 对称的点 A' ，作点 A 关于 OB 对称的点 A'' ，连接 A' 、 A'' ，分别交 OD 于点 P ，交 OB 与点 Q 。



🔗 四边形周长最小

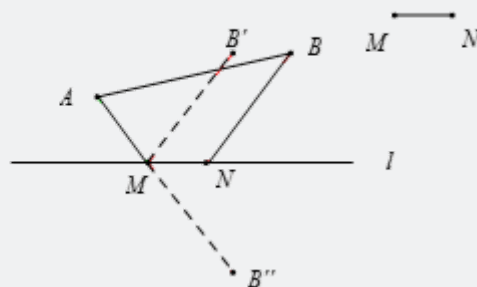
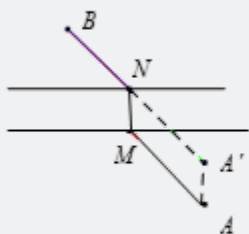
如图，点 A 、 B 在直角 $\angle DOC$ 的内部，在 OD 边上求作一点 P ，在 OC 边上求作一点 Q ，使四边形 $APQB$ 的周长最小（或者使得 $PA + PQ + BQ$ 最小）。

【作法】：作点 A 关于 OD 对称的点 A' ，作点 B 关于 OC 对称的点 B' ，连接 A' 、 B' ，分别交 OD 于点 P ，交 OC 与点 Q 。



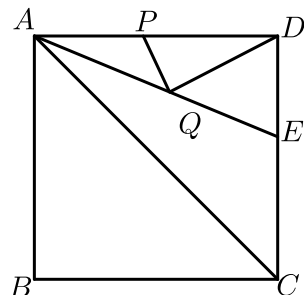
🔗 过河问题

过河最短距离、定长问题



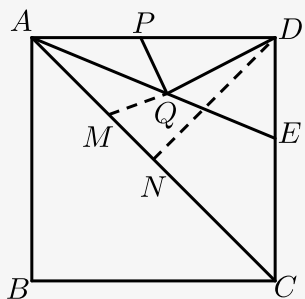
典题精练1

6. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长是4， $\angle DAC$ 的平分线交 DC 于点 E ，若点 P 、 Q 分别是 AD 和 AE 上的动点，则 $DQ + PQ$ 的最小值是 _____ .



【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】 方法一：如图1，在 AE 上取点 M ，使得 $AM = AP$ ，作
 $DN \perp AE$ 于点 N ，



$\because AE$ 是 $\angle BAD$ 的平分线，
 $\therefore \angle DAE = 90^\circ \div 2 = 45^\circ$ ，
 $\because \angle DAF = 22.5^\circ$ ，
 $\therefore \angle EAF = 45^\circ - 22.5^\circ = 22.5^\circ$ ，
 $\therefore \angle DAF = \angle EAF$ ，

在 $\triangle APQ$ 和 $\triangle AMQ$ 中，

$$\begin{cases} AP = AM \\ \angle PAQ = \angle MAQ \\ AQ = AQ \end{cases}$$

$\therefore \triangle APQ \cong \triangle AMQ$ ，

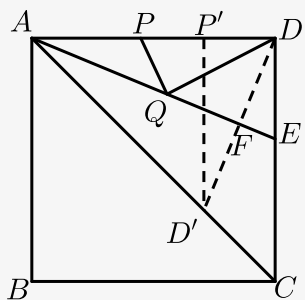
$\therefore PQ = MQ$ ，

$\therefore DQ + PQ = DQ + MQ = DM$ ，

$\because DN \perp AE$ ， $DN = AD \times \sin 45^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore DQ + PQ$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$ 。

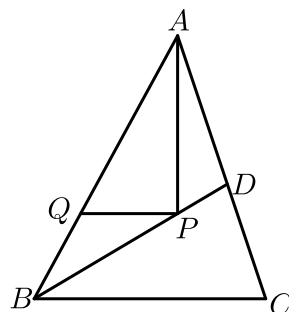
方法二：作 D 关于 AE 的对称点 D' ，再过 $D'P' \perp AD$ 于 P' ，



$\therefore DD' \perp AE$,
 $\therefore \angle AFD = \angle AFD'$,
 $\therefore AF = AF$, $\angle DAE = \angle CAE$,
 $\therefore \triangle DAF \cong \triangle D'AF$,
 $\therefore D'$ 是 D 关于 AE 的对称点 , $AD' = AD = 4$,
 $\therefore D'P'$ 即为 $DQ + PQ$ 的最小值 ,
 $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形 ,
 $\therefore \angle DAD' = 45^\circ$,
 $\therefore AP' = P'D'$,
 $\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle AP'D'$ 中 ,
 $P'D'^2 + AP'^2 = AD'^2$, $AD'^2 = 16$,
 $\therefore AP' = P'D'$,
 $2P'D'^2 = AD'^2$, 即 $2P'D'^2 = 16$,
 $\therefore P'D' = 2\sqrt{2}$,
 即 $DQ + PQ$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$,
 故答案为： $2\sqrt{2}$.

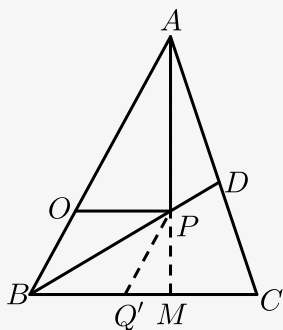
【标注】【知识点】线段和的最小值

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB = 15$ ， $BC = 14$ ， $AC = 13$ ， BD 平分 $\angle ABC$ ．若 P ， Q 分别是 BD 和 AB 上的动点，则 $PA + PQ$ 的最小值是 _____ ．



【答案】 12

【解析】 如图，作点 Q 关于直线 BD 的对称点 Q' ，作 $AM \perp BC$ 于 M 。



$$\therefore PA + PQ = PA + PQ',$$

$\therefore$ 根据垂线段最短可知，当 A, P, Q' 共线，且与 AM 重合时， $PA + PQ$ 的值最小，最小值=线段 AM 的长。

$$\text{设 } CM = x, AM = y,$$

$$\text{由题意：} \begin{cases} x^2 + y^2 = 13^2 \\ (14 - x)^2 + y^2 = 15^2 \end{cases}$$

$$\text{解得 } y = 12,$$

$$\therefore PA + PQ \text{ 的最小值为 } 12.$$

故答案为：12。

【标注】 【知识点】 轴对称的性质

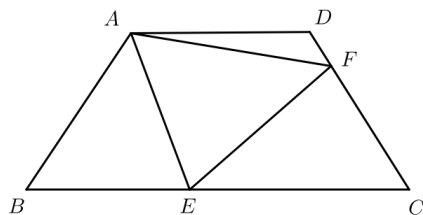
【知识点】 垂线段最短

【知识点】 线段和的最小值

【知识点】 勾股定理

典题精练2

8. 在四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB = AD = CD = 4$ ， $AD \parallel BC$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，点 E 、 F 分别为边 BC 、 CD 上的两动点，且 $\angle EAF = 60^\circ$ ， $\triangle AEF$ 周长的最小值为 _____。



【答案】 12

【解析】 存在，如图，作 A 关于 BC 、 CD 的对称点 A' 、 A'' ，交 BC 于 G ，交直线 CD 于 H ，

连接 $A'A''$ ，交 BC 于 E ，交 CD 于 F ，

此时 $\triangle AEF$ 的周长最小；

$$\because AB = AD = 4,$$

$$\therefore AG = AH = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AA' = AA'',$$

在四边形 $AGCH$ 中， $\because \angle C = 60^\circ$ ，

$$\angle AGC = \angle AHC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A'AA'' = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle A' = 30^\circ,$$

$$\therefore AE = A'E,$$

$$\therefore \angle A' = \angle A', AE = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle A' + \angle A'AE = 60^\circ,$$

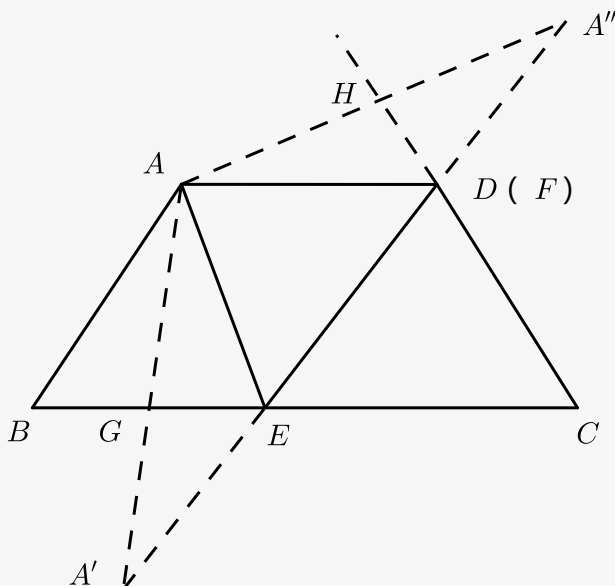
$$\therefore \angle EAF = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle EAF$ 是等边三角形，

$$\therefore A'E = AE = 4,$$

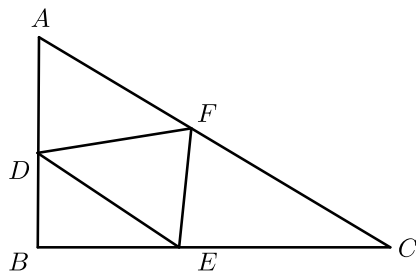
$\therefore \triangle AEF$ 的周长 $= 4 \times 3 = 12$ ，且此时 F 与 D 重合，

即 $\triangle AEF$ 存在周长最小值，最小值是12。



【标注】【知识点】线段和的最小值

9. 如图所示，在 $Rt\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ， $BC = 8$ ， D ， E ， F 分别是三边 AB ， BC ， CA 上的点，则 $DE + EF + FD$ 的最小值为 _____。



【答案】 $\frac{48}{5}$

【解析】 作 F 关于 AB 、 BC 的对称点 F' 、 F'' ，

则 $FD = F'D$ ， $FE = F''E$ 。

$$DE + EF + FD = DE + F'D + F''E.$$

两点之间线段最短，可知当 F 固定时， $DE + F'D + F''E$ 的最小值是线段 $F'F''$ 的长。

于是问题转化： F 运动时， $F'F''$

什么时候最短．

F' ， F'' 是关于 B 点的对称的．

作 AC 关于 AB 、 BC 的对称线段，

可以发现 F' ， F'' 是一个菱形对边

上的关于中心 B 对称的对称点，很

容易发现， F' ， F'' 的最短距离就

是菱形对边的距离，也就是菱形的

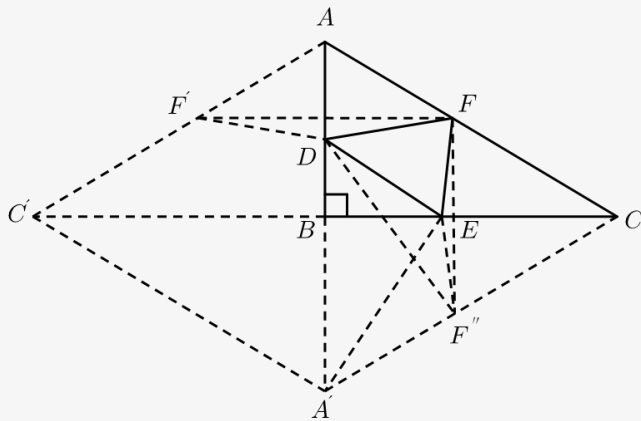
高．

$$\frac{1}{2} \times 12 \times 16 = 10x$$

$$x = \frac{48}{5}, \text{高是} \frac{48}{5},$$

故 $DE + EF + FD$ 的最小值为 $\frac{48}{5}$ ．

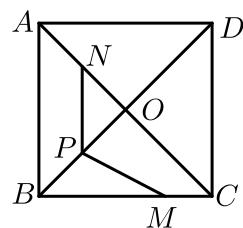
故答案为： $\frac{48}{5}$ ．



【标注】【知识点】中点类综合计算与证明

典题精练3

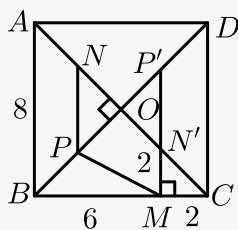
10. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AB = 8$ ， AC 与 BD 交于点 O ， N 是 AO 的中点，点 M 在 BC 边上，且 $BM = 6$ ， P 为对角线 BD 上一点，则 $PM - PN$ 的最大值为 _____．



【答案】2

【解析】作 N 关于 BD 的对称点 N' （ OC 中点），

连接 MN' 并延长，



与 BD 交于 P' ，

$$\text{则}(PM - PN)_{\max}$$

$$= P'M - P'N'$$

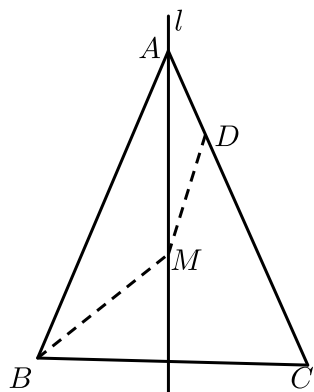
$$= MN'.$$

不难求得： $\triangle CMN'$ 为等腰Rt $\triangle \Rightarrow MN' = 2$.

【标注】【能力】推理论证能力

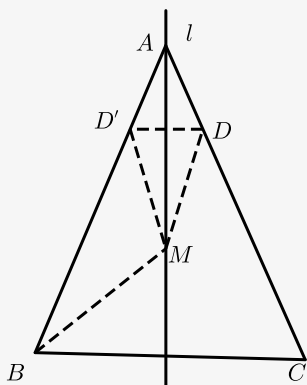
【知识点】正方形的性质

11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 4$ ，直线 l 为 $\triangle ABC$ 的对称轴，点 D 在 AC 边上，且 $AD = 1$ ，点 M 为直线 l 上一个动点，连接 BM ， DM ，则 $|BM - DM|$ 的最大值为 _____ .



【答案】3

【解析】如图作 D' 与 D 关于 l 对称，连接 $D'M$ ， DM ， BM ，



$\because AB = AC = 4$ ，直线 l 为 $\triangle ABC$ 的对称轴，

$\therefore D'$ 在 AB 上，

$\because D$ 与 D' 关于直线 l 对称，

$\therefore DM = D'M$ ， $AD = AD' = 1$ ，

$\therefore BM - DM = BM - D'M \leq BD$ ，

当 M 与 A 重合时， $BM - DM$ 取最大值为 BD' ，

$\because AB = 4$ ， $AD' = 1$ ，

$$\therefore BD' = 3,$$

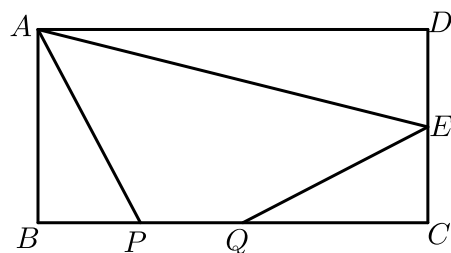
$$\therefore |BM - DM| \leq 3,$$

$$\therefore |BM - DM| \text{ 的最大值为 } 3.$$

【标注】【知识点】线段差的绝对值最大

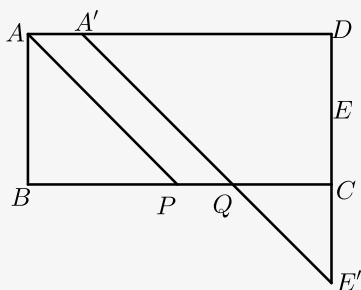
典题精练4

12. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $BC = 7$ ， E 为 CD 的中点，若 P 、 Q 为 BC 边上的两个动点，且 $PQ = 2$ ，若想使得四边形 $APQE$ 的周长最小，则 BP 的长度应为 _____。



【答案】 $\frac{10}{3}$

【解析】在 AD 上截取 $AA' = 2$ ，



过点 E 关于直线 BC 的对称点 E' ，

连接 $A'E'$ 交 BC 于点 Q ，

截取 $PQ = 2$ ， P ， Q 两点即为所求。

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形， $AB = 4$ ， $BC = 7$ ，

$\therefore CD = AB = 4$ ，

$\therefore BC \parallel AD$ ，

$BC = AD = 7$ ， $A'D = AD - AA' = 5$ ，

$\because E$ 为 CD 中点，

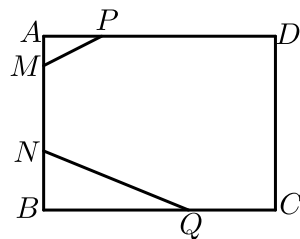
$\therefore CE = DE = 2$ ，

$\therefore CE' = 2$ ，

$$\begin{aligned}
&\because CQ \parallel A'D, \\
&\angle CE'Q \sim \angle DE'A', \\
&\therefore \triangle CE'Q \sim \triangle DE'A', \\
&\therefore \frac{CQ}{A'D} = \frac{CE'}{E'D}, \\
&\therefore \frac{A'D}{CQ} = \frac{E'D}{CE'}, \\
&\frac{CQ}{5} = \frac{2}{6}, \\
&CQ = \frac{5}{3}, \\
&\therefore BP = BC - PQ - CQ = 7 - 2 - \frac{5}{3} = \frac{10}{3}.
\end{aligned}$$

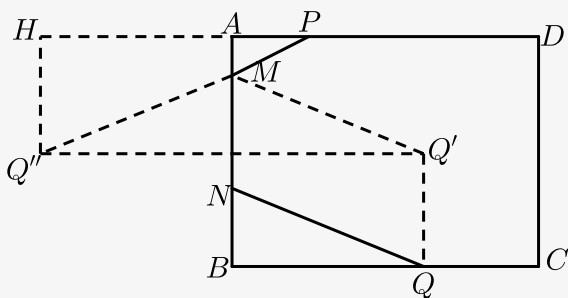
【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

13. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， MN 在边 AB 上运动， $MN = 3$ ， $AP = 2$ ， $BQ = 5$ ， $PM + MN + NQ$ 最小值是 _____。



【答案】 $3 + \sqrt{58}$

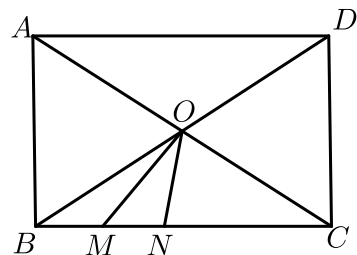
【解析】作 $QQ' \perp AB$ ，使得 $QQ' = MN = 3$ ，作点 Q' 关于直线 AB 的对称点 Q'' ，连接 PQ'' 交 AB 于 M ，此时 $PM + MN + NQ$ 的值最小。作 $Q''H \perp DA$ 于 H 。



$$\begin{aligned}
&\text{在 Rt}\triangle PHQ'', PQ'' = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58}, \\
&\therefore PM + MN + NQ \text{ 的最小值} = 3 + \sqrt{58}.
\end{aligned}$$

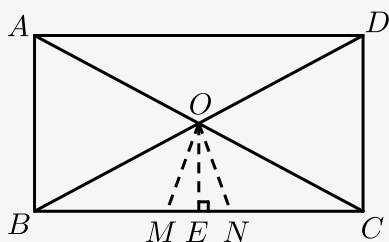
【标注】【知识点】线段和的最小值

14. 如图， O 为矩形 $ABCD$ 对角线 AC ， BD 的交点， $AB = 6$ ， M ， N 是直线 BC 上的动点，且 $MN = 2$ ，则 $OM + ON$ 的最小值是 _____ .



【答案】 $2\sqrt{10}$

【解析】 过点 O 作 $OE \perp BC$ 于 E ，



由题可知当 E 为 MN 的中点时，

此时 $OM + ON$ 为最小值，

$$\because AB = 6,$$

$$\therefore OE = 3, \text{ (中位线性质)}$$

$$\because MN = 2,$$

$$\therefore ME = NE = 1,$$

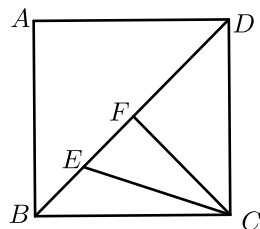
$$\therefore OM = ON = \sqrt{10}, \text{ (勾股定理)}$$

$$\therefore OM + ON \text{ 的最小值} = 2\sqrt{10}.$$

【标注】 【能力】 运算能力

【知识点】 矩形的性质

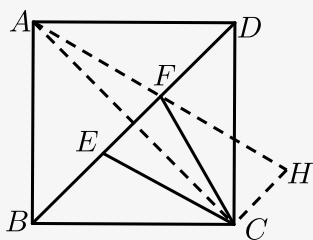
15. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为6， E ， F 是对角线 BD 上的两个动点，且 $EF = 2\sqrt{2}$ ，连接 CE ， CF ，则 $\triangle CEF$ 周长的最小值为 _____ .



【答案】 $2\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$

【解析】如图作 $CH \parallel BD$ ，使得 $CH = EF = 2\sqrt{2}$ ，连接 AH 交 BD 于 F ，则 $\triangle CEF$ 的周长最

小，



$\therefore CH = EF, CH \parallel EF,$

$\therefore$ 四边形 $EFHC$ 是平行四边形，

$\therefore EC = FH,$

$\therefore FA = FC,$

$\therefore EC + CF = FH + AF = AH,$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AC \perp BD,$

$\therefore CH \parallel DB,$

$\therefore AC \perp CH,$

$\therefore \angle ACH = 90^\circ,$

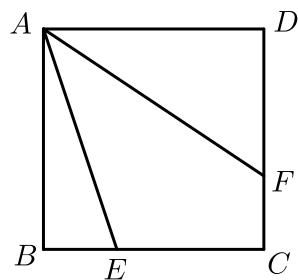
在 $\text{Rt}\triangle ACH$ 中， $AH = \sqrt{AC^2 + CH^2} = 4\sqrt{5}$

$\therefore \triangle EFC$ 的周长的最小值 $= 2\sqrt{2} + 4\sqrt{5}.$

【标注】【知识点】正方形的性质

典题精练6

16. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为2， E, F 分别是边 BC, CD 上的两个动点，且满足 $BE = CF$ ，连接 AE, AF ，则 $AE + AF$ 的最小值为 _____ .

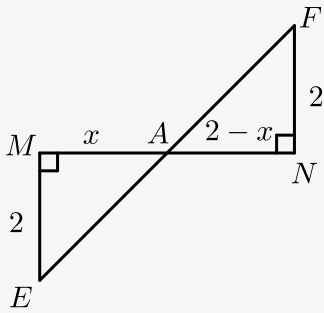


【答案】 $2\sqrt{5}$

【解析】方法一：设 $BE = CF = x, DF = 2 - x,$

$$\therefore AE + AF = \sqrt{2^2 + x^2} + \sqrt{2^2 + (2-x)^2},$$

如图：



$$\text{此时 } AE = \sqrt{2^2 + x^2}, AF = \sqrt{2^2 + (2-x)^2},$$

由两点之间线段最短可知，

当E、A、F共线时，AE + AF的最小，

此时由EM = FN，∠M = ∠N，∠EAM = ∠FAN，

得△EAM ≅ △FAN，

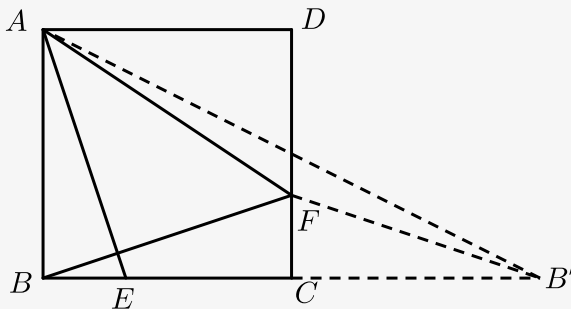
$$\therefore x = 2 - x,$$

解得：x = 1，

$$\text{故 } AE + AF \text{ 的最小值为 } \sqrt{2^2 + 1^2} + \sqrt{2^2 + 1^2} = 2\sqrt{5}.$$

方法二：连接BF，作B关于CD对称点B'，

连接AB'，B'F，



$$\therefore AB = BC, \angle ABC = \angle BCD, BE = CF,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle BCF,$$

$$\therefore AE = BF,$$

$$\therefore AE + AF = AF + BF,$$

由对称性知BF = B'F，

$$\therefore AE + AF = AF + B'F,$$

当A、F、B'三点共线时距离最小为AB'，

$$AB' = \sqrt{AB^2 + BB'^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5},$$

AE + AF的最小值为2√5.

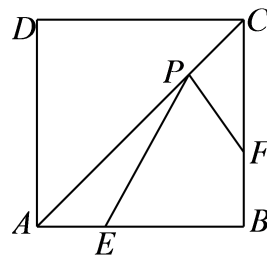
【标注】【思想】数形结合思想

【知识点】全等三角形的对应边与角

【知识点】轴对称的性质

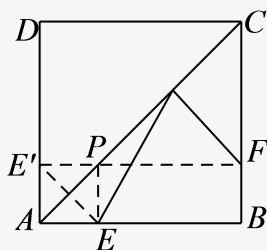
【能力】推理论证能力

17. 如图，正方形 $ABCD$ 的面积为2，点 E, F 分别在边 AB, BC 上，且 $AE = BF$ ， P 是 AC 上的动点， $PE + PF$ 的最小值为 _____ .



【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】在 AD 上截取 AE' ，使 $AE' = AE$ ，连接 PE ，



$\because$ 正方形 $ABCD$ ， AC 为对角线，

$\therefore E$ 与 E' 关于 AC 对称， $PE' = PE$ ，

$\because BF = AE$ ，

$\therefore AE' = BF$ ，四边形 $ABFE'$ 为矩形，

连接 $E'F$ 与 AC 的交点即为点 P ，此时 $PE + PF$ 有最小值，

$\because S_{\text{正方形}ABCD} = 2$ ，

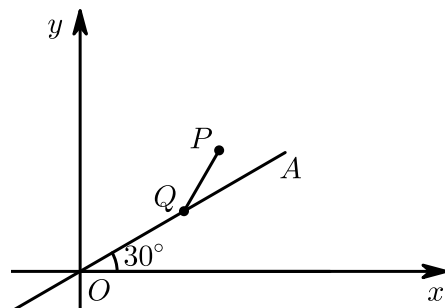
$\therefore AB = EF = \sqrt{2}$ ，

$\therefore PE + PF$ 的值最小值为 $E'F$ 的长度为 $\sqrt{2}$ 。

【标注】【知识点】线段和的最小值

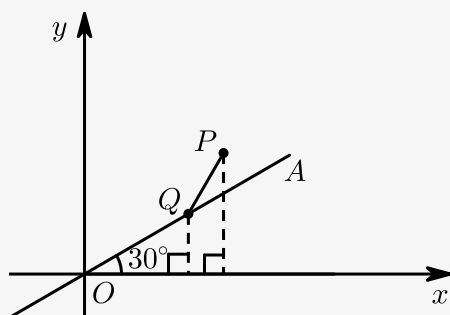
3. 胡不归问题

18. 如图，直线 OA 与 x 轴的夹角为 30° ，点 P 的坐标为 $(3, 3)$ ，若 Q 为直线 OA 上一点，则 $PQ + \frac{1}{2}OQ$ 的最小值为 _____ .



【答案】 3

【解析】 作 $QH \perp x$ 轴于点 H ，



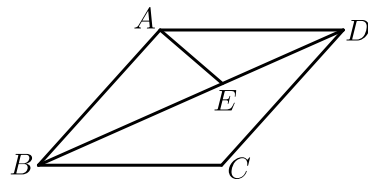
$\because \angle QOH = 30^\circ, \therefore QH = \frac{1}{2}OQ$,

则 $PQ + \frac{1}{2}OQ = PQ + QH$,

当 P, Q, H 三点共线时, $PQ + QH$ 取最小值, 即 PH 的长度为3.

【标注】 【知识点】 胡不归问题

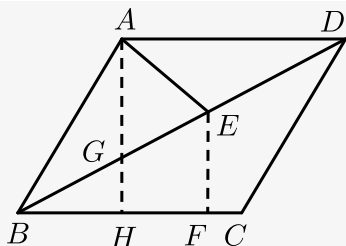
19. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $AD = 4$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，点 E 为对角线 BD 上任意一点（不含点 B ），连接 AE ，则 $AE + \frac{1}{2}BE$ 的最小值为 _____ .



【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】 过点 A 作 $AH \perp BC$ 交 BC 于点 H ，交 BD 于点 G ，

过点 E 作 $EF \perp BC$ 交 BC 于点 F .



在菱形 $ABCD$ 中，

$$\angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EBC = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore EF \perp BC,$$

$\therefore \triangle BEF$ 为直角三角形.

在 $\text{Rt}\triangle BEF$ 中, $\angle BFE = 90^\circ$,

$$\therefore \angle EBC = 30^\circ,$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2} BE,$$

$$\therefore AE + \frac{1}{2} BE = AE + EF,$$

$$\therefore AE + EF \geq AH,$$

$\therefore$ 当点 E 运动到点 G 时,

$$(AE + EF)_{\min} = AH,$$

$$\therefore AH \perp BC,$$

$\therefore \triangle ABH$ 为直角三角形,

在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中, $\angle AHB = 90^\circ$,

$$AB = AD = 4, \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\sin \angle ABC = \frac{AH}{AB},$$

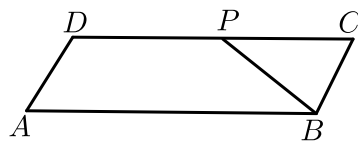
$$\text{即} \sin 60^\circ = \frac{AH}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{解得: } AH = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \left(AE + \frac{1}{2} BE \right)_{\min} = (AE + EF)_{\min} = AH = 2\sqrt{3}.$$

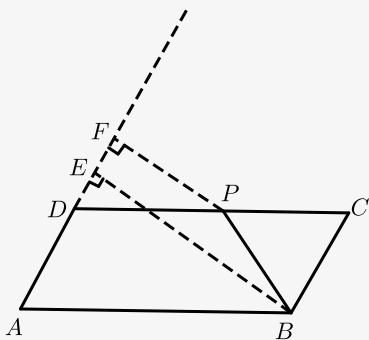
【标注】【知识点】线段和的最小值

20. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle DAB = 60^\circ$, $AB = 6$, $BC = 2$, P 为边 CD 上的一动点, 则 $PB + \frac{\sqrt{3}}{2} PD$ 的最小值等于 _____.



【答案】 $3\sqrt{3}$

【解析】



过点 P 作 $PF \perp AD$ ，交 AD 延长线于点 F ，

过点 B 作 $BE \perp AD$ ，交 AD 延长线于点 E ，

在 $\text{Rt}\triangle AEB$ 中，

$\because \angle DAB = 60^\circ$ ， $AB = 6$ ，

$\therefore AE = AB \cdot \cos \angle DAB = 6 \times \frac{1}{2} = 3$ ，

又 $\because AD = BC = 2$ ，

$\therefore AE > AD$ ，

$\therefore E$ 在 AD 的延长线上，

在 $\text{Rt}\triangle PFD$ 中，

$\because \angle PDF = \angle DAB = 60^\circ$ ，

$\therefore PF = PD \cdot \sin \angle PDF = \frac{\sqrt{3}}{2} PD$ ，

$\therefore PB + \frac{\sqrt{3}}{2} PD = PB + PF$ ，

易知当 B 、 P 、 F 三点共线时 $PB + PF$ 取最小值，

即 $PB + \frac{\sqrt{3}}{2} PD$ 的最小值为 $BE = BA \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$ 。

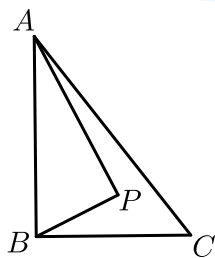
故答案为： $3\sqrt{3}$ 。

【标注】【知识点】胡不归问题

4. 找隐圆

典题精练

21. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB \perp BC$ ， $AB = 6$ ， $BC = 4$ ， P 是 $\triangle ABC$ 内部的一个动点，且满足 $\angle PAB = \angle PBC$ ，则线段 CP 长的最小值为（ ）。



A. $\frac{3}{2}$

B. 2

C. $\frac{8\sqrt{13}}{13}$

D. $\frac{12\sqrt{13}}{13}$

【答案】 B

【解析】 $\because AB \perp BC$,

$$\therefore \angle ABP + \angle PBC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PAB = \angle PBC,$$

$$\therefore \angle BAP + \angle ABP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APB = 90^\circ,$$

$\therefore$ 点 P 在以 AB 为直径的 $\odot O$ 上, 连接 OC 交 $\odot O$ 于点 P , 此时 PC 最小,

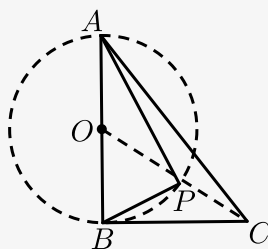
在 $\text{Rt}\triangle BCO$ 中,

$$\therefore \angle OBC = 90^\circ, BC = 4, OB = 3,$$

$$\therefore OC = \sqrt{BO^2 + BC^2} = 5,$$

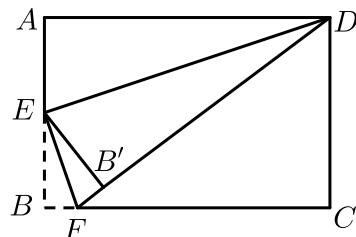
$$\therefore PC = OC - OP = 5 - 3 = 2.$$

$\therefore PC$ 最小值为 2.



【标注】 【知识点】 勾股定理的综合应用

22. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $AD = 6$, E 是 AB 边的中点, F 是线段 BC 上的动点, 将 $\triangle EBF$ 沿 EF 所在直线折叠得到 $\triangle EB'F$, 连接 $B'D$, 则 $B'D$ 的最小值是 () .



A. $2\sqrt{10} - 2$

B. 6

C. $2\sqrt{13} - 2$

D. 4

【答案】 A

【解析】如图，当点 B' 在 DE 上时，此时 $B'D$ 的值最小，

根据折叠的性质， $\triangle EBF \cong \triangle EB'F$ ，

$\therefore EB' = EB$ ，

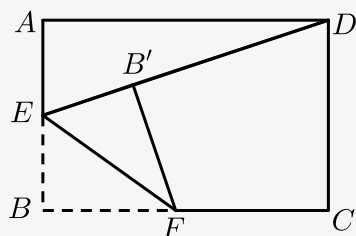
$\therefore E$ 是 AB 边的中点， $AB = 4$ ，

$\therefore AE = EB' = 2$ ，

$\therefore AD = 6$ ，

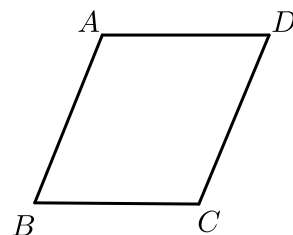
$\therefore DE = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$ ，

$\therefore DB' = 2\sqrt{10} - 2$ 。



【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

23. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $AB = 1$ ，点 P 是这个菱形内部或边上的一点，若以点 P ， B ， C 为顶点的三角形是等腰三角形，则 P ， D （ P ， D 两点不重合）两点间的最短距离为（ ）。



A. $\frac{1}{2}$

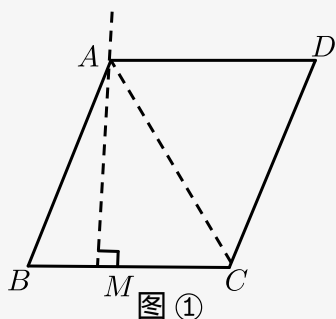
B. 1

C. $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{3} - 1$

【答案】D

【解析】如图①，连接 AC ，



$\therefore AB = BC$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形 ,

$\therefore \angle D = \angle B = 60^\circ$, $AD = CD$,

$\therefore \triangle ACD$ 是等边三角形 ,

(1) 当 BC 为底时 , 点 P 应在 BC 的中垂线上 ,

过点 A 作 $AM \perp BC$ 于 M , 如图① ,

则点 P 在线段 AM 上 ,

$\therefore AD \parallel BC$,

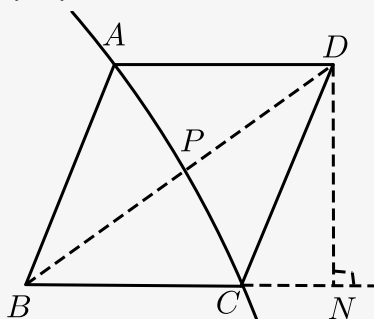
$\therefore \angle MAD = \angle AMB = 90^\circ$,

即 $DA \perp AM$,

$\therefore$ 当点 P 与点 A 重合时 , PD 最短 ,

此时 $PD = AB = 1$.

(2) 当 BC 为腰 , CP 为底时 , 点 P 应在以 B 为圆心 , BC 为半径的圆上 , 如图② ,



图②

即点 P 在 $\widehat{AC}$ 上 ,

连接 BD 交 $\widehat{AC}$ 于点 P , 此时 PD 最短 ,

作 $DN \perp BC$ 于 N ,

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore \angle DCN = \angle ABC = 60^\circ$,

又 $\therefore CD = AB = 1$,

$\therefore CN = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}$,

$\therefore DN = \sqrt{CD^2 - CN^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore BN = BC + CN = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,

$\therefore BD = \sqrt{DN^2 + BN^2} = \sqrt{3}$,

$\therefore PD = BD - BP = \sqrt{3} - 1$.

(3) 当 BC 为腰 , BP 为底时 , 点 P 应在以 C 为圆心 , BC 为半径的圆上 , 如图③ ,

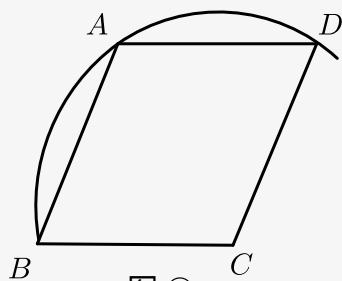


图 ③

即点 P 与点 A 重合，此时 $PD = 1$ ，

$\therefore$ 综上： PD 最短为 $\sqrt{3} - 1$ 。

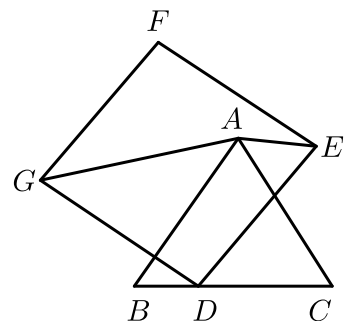
【标注】【思想】数形结合思想

【能力】运算能力

【能力】推理论证能力

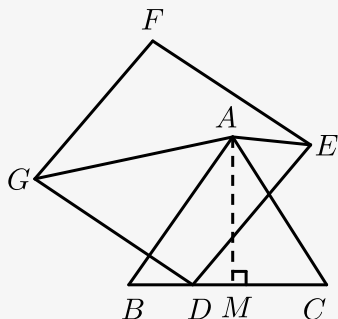
【知识点】菱形的性质

24. 如图， $\triangle ABC$ 是等边三角形，点 D 为 BC 边上一点， $BD = \frac{1}{2}DC = 2$ ，以点 D 为顶点作正方形 $DEFG$ ，且 $DE = BC$ ，连接 AE ， AG 。若将正方形 $DEFG$ 绕点 D 旋转一周，当 AE 取最小值时， AG 的长为 _____。



【答案】8

【解析】过点 A 作 $AM \perp BC$ 于 M ，



$$\therefore BD = \frac{1}{2}DC = 2,$$

$$\therefore DC = 4,$$

$$\therefore BC = BD + DC = 2 + 4 = 6,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore AB = AC = BC = 6,$$

$\therefore AM \perp BC,$

$$\therefore BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 6 = 3,$$

$$\therefore DM = BM - BD = 3 - 2 = 1,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABM \text{ 中, } AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3},$$

当点 E 在 DA 延长线上时, $AE = DE - AD$.

此时 AE 取最小值,

$$\text{在 Rt}\triangle ADM \text{ 中, } AD = \sqrt{DM^2 + AM^2} = \sqrt{1^2 + (3\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{7},$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ADG \text{ 中, } AG = \sqrt{AD^2 + DG^2} = \sqrt{(2\sqrt{7})^2 + 6^2} = 8.$$

故答案为: 8.

【标注】【能力】推理论证能力

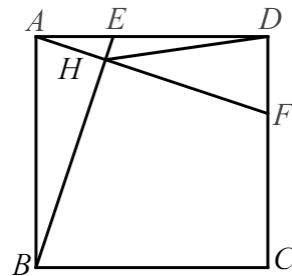
【知识点】正方形的性质

【知识点】等边三角形的性质

【知识点】旋转性质综合应用

【知识点】旋转的性质

25. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边 AD 、 CD 上两个动点 E 、 F , 且满足 $AF = BE$, BE 交 AF 于点 H . 若正方形的边长为 4, 线段 DH 最小值是 _____.



【答案】 $2\sqrt{5} - 2$

【解析】 取 AB 的中点 O , 连接 OH 、 OD , 如图所示:

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = DA, \angle BAE = \angle ADF = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle BAE$ 和 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中, $\begin{cases} AD = AB \\ AF = BE \end{cases}$,

$\therefore \text{Rt}\triangle BAE \cong \text{Rt}\triangle ADF$ (SAS),

$\therefore \angle ABE = \angle DAF$,

$\therefore \angle DAF + \angle BAF = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABE + \angle BAF = 90^\circ$,

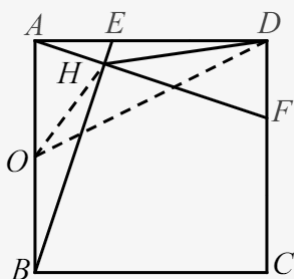
$\therefore \angle AHB = 90^\circ$,

$\therefore OH = \frac{1}{2}AB = 2$,

$\therefore OD = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$,

当 O 、 D 、 H 三点重合时, 在一条直线上时, DH 长度最小,

线段 DH 长度的最小值是: $2\sqrt{5} - 2$.

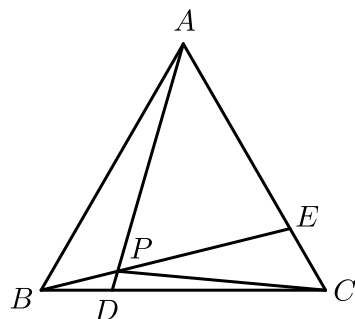


【标注】【知识点】圆内接四边形的性质定理

【知识点】直角三角形斜边中线性质的应用

【知识点】正方形的性质

26. 如图, 边长为3的等边 $\triangle ABC$, D 、 E 分别为边 BC 、 AC 上的点, 且 $BD = CE$, AD 、 BE 交于 P 点, 则 CP 的最小值为 _____.



【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】 $\because$ 在等边 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$,

$AB = BC = 3$, $BD = CE$,

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle BCE (\text{SAS}) .$$

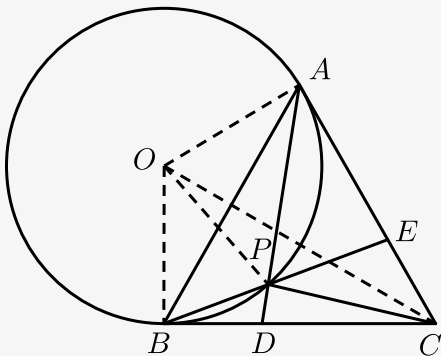
$$\therefore \angle CBE = \angle BAP .$$

$$\therefore \angle CBE + \angle ABP = \angle ABC = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle APE = \angle BAP + \angle ABP = \angle CBE + \angle ABP = 60^\circ .$$

$$\therefore \angle APB = 120^\circ .$$

作 $\triangle APB$ 的外接圆 $\odot O$, 连接 OA 、 OB 、 OP 、 OC , 如图 ,



则点 P 在 $\widehat{APB}$ 是运动 ,

$$\therefore OA = OB , AC = BC , OC = OC ,$$

$$\therefore \triangle AOC \cong \triangle BOC (\text{SSS}) .$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OBC , \angle ACO = \angle BCO = \frac{1}{2} \angle ACB = 30^\circ ,$$

$$\angle AOC = \angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB .$$

$$\therefore OA = OP = OB ,$$

$$\therefore \angle OAP = \angle OPA , \angle OBP = \angle OPB .$$

$$\therefore \angle OAP + \angle OBP = \angle OPA + \angle OPB = \angle APB = 120^\circ .$$

$$\therefore \angle AOB = 360^\circ - \angle OAP - \angle OBP - \angle APB = 120^\circ .$$

$$\therefore \angle AOC = \angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB = 60^\circ .$$

$$\therefore \angle OAC = 180^\circ - \angle AOC - \angle ACO = 90^\circ .$$

$$\therefore OA = \frac{1}{2} OC .$$

$$\therefore OC = 2OA .$$

$$\therefore OA^2 + AC^2 = OC^2 ,$$

$$\therefore OA^2 + AC^2 = (2OA)^2 .$$

$$\therefore OA = \sqrt{3} .$$

$$\therefore OC = 2OA = 2\sqrt{3} .$$

$$\therefore PC \geqslant OC - OP ,$$

$$\therefore PC \geqslant \sqrt{3} .$$

$$\therefore PC \text{ 的最小值为 } \sqrt{3} .$$

故答案为 : $\sqrt{3}$.

【标注】【知识点】等边三角形的性质

【能力】运算能力

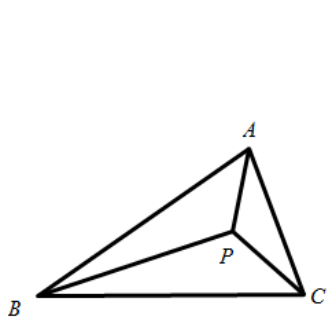
5. 费马点

教法备注

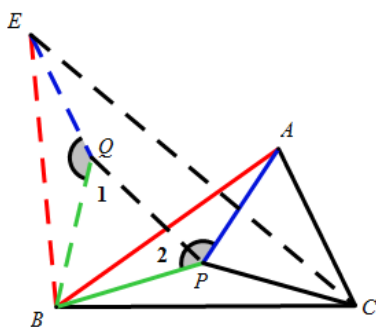
“费马点”是指位于三角形内且到三角形三个顶点距离之和最短的点。

若给定一个三角形 $\triangle ABC$ 的话，从这个三角形的费马点 P 到三角形的三个顶点 A 、 B 、 C 的距离之和比从其它点算起的都要小。

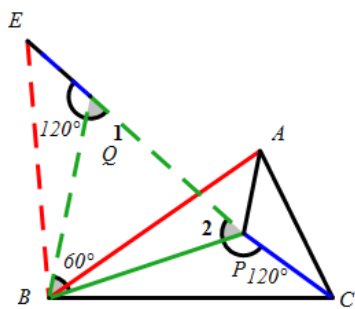
这个特殊点对于每个给定的三角形都只有一个。



图一



图二



图三

【证明】：如图一，在 $\triangle ABC$ 内任取一点 P ，连接 PA 、 PB 、 PC

如图二，将 $\triangle APB$ 绕点 B 旋转 60° 得到 $\triangle EQB$ ，则 $\triangle EQB \cong \triangle APB$

连接 PA ， $\because \angle PBQ = 60^\circ$ ， $PB = PQ$ ，

$\therefore \triangle QPB$ 是等边三角形，则 $PB = QP = BQ$ ， $\angle 1 = \angle 2 = 60^\circ$ 。

$\therefore PA + PB + PC = EQ + QP + PC \geq EC$ 。

如图三，当且仅当 E 、 Q 、 P 、 C 四点共线时取等号，此时 $\angle EQB = \angle CPB = 120^\circ$

$\therefore \angle APB = \angle APC = \angle BPC = 120^\circ$ ， $PA + PB + PC$ 取到最小值 EC 。

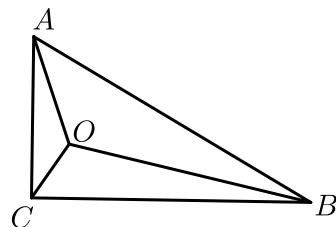
$\therefore$ 点 P 是 $\triangle ABC$ 的费马点，且点 P 到三角形三个顶点的距离之和最小

【结论】

- 1、费马点到三角形三个顶点的距离之和最短
- 2、费马点连接三顶点所成的夹角皆为 120°

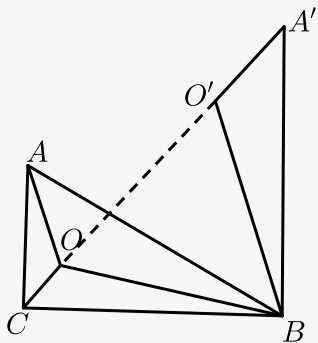
典题精练

27. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 1$ ， $BC = \sqrt{3}$ ，点 O 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 内一点，连接 AO 、 BO 、 CO ，且 $\angle AOC = \angle COB = \angle BOA = 120^\circ$ ，则 $OA + OB + OC = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 $\sqrt{7}$

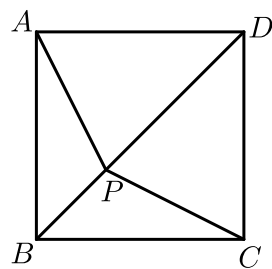
【解析】 $\because \angle ACB = 90^\circ$, $AC = 1$, $BC = \sqrt{3}$,
 $\therefore \tan \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
 $\therefore \angle ABC = 30^\circ$,
 $\therefore \triangle AOB$ 绕点 B 顺时针方向旋转 60° ,
 $\therefore \angle A'BC = \angle ABC + 60^\circ = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$,
 $\therefore A'B \perp CB$,
 $\because \angle ACB = 90^\circ$, $AC = 1$, $\angle ABC = 30^\circ$,
 $\therefore AB = 2AC = 2$,
 $\therefore \triangle AOB$ 绕点 B 顺时针方向旋转 60° , 得到 $\triangle A'O'B$,



$\therefore A'B = AB = 2$, $BO = BO'$, $A'O' = AO$,
 $\therefore \triangle BOO'$ 是等边三角形,
 $\therefore BO = OO'$, $\angle BOO' = \angle BO'O = 60^\circ$,
 $\therefore \angle AOC = \angle COB = \angle BOA = 120^\circ$,
 $\therefore \angle COB + \angle BOO' = \angle BO'A' + \angle BO'O = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$,
 $\therefore C, O, A', O'$ 四点共线,
 在 $\text{Rt}\triangle A'BC$ 中, $A'C = \sqrt{BC^2 + A'B^2} = \sqrt{7}$,
 $\therefore OA + OB + OC = A'O' + OO' + OC = A'C = \sqrt{7}$.

【标注】 【知识点】 费马点

28. 如图, P 为正方形 $ABCD$ 对角线 BD 上一动点, 若 $AB = 2$, 则 $AP + BP + CP$ 的最小值为 _____.



【答案】 $\sqrt{6} + \sqrt{2}$.

【解析】 如图将 $\triangle ABP$ 绕点 A 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle AEF$, 当 E, F, P, C 共线时, $PA + PB + PC$ 最小.

理由: $\because AP = AF, \angle PAF = 60^\circ$,

$\therefore \triangle PAF$ 是等边三角形,

$\therefore PA = PF = AF, EF = PB$,

$\therefore PA + PB + PC = EF + PF + PC$,

$\therefore$ 当 E, F, P, C 共线时, $PA + PB + PC$ 最小,

作 $EM \perp DA$ 交 DA 的延长线于 M ,

ME 的延长线交 CB 的延长线于 N ,

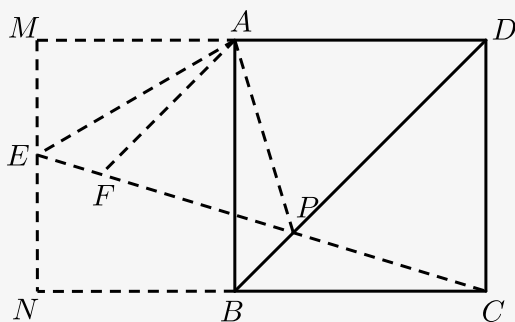
则四边形 $ABNM$ 是矩形, 在 $\text{Rt}\triangle AME$ 中,

$\because \angle M = 90^\circ, \angle MAE = 30^\circ, AE = 2$,

$\therefore ME = 1, AM = BN = \sqrt{3}, MN = AB = 2, EN = 1$,

$\therefore EC = \sqrt{EN^2 + NC^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3} + 2)^2}$
 $= \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

$\therefore PA + PB + PC$ 的最小值为 $\sqrt{6} + \sqrt{2}$.

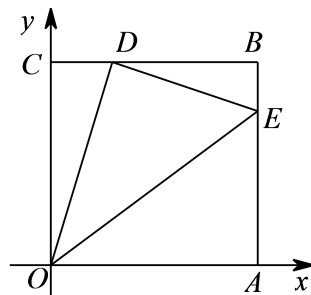


【标注】 【知识点】 利用三边关系解决的最短问题

6. 代数思想

典题精练

29. 如图, 边长为1的正方形 $OABC$ 的顶点 O 为坐标原点, 点 A 在 x 轴的正半轴上, 点 C 在 y 轴的正半轴上, 动点 D 在边 BC 上移动(不与点 B, C 重合), 连接 OD , 过点 D 作 $DE \perp OD$, 交边 AB 于点 E , 连接 OE , 当线段 OE 的长度取得最小值时, 点 E 的纵坐标为().



- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. 1

【答案】C

【解析】设 D 点坐标为 $(x, 1)$,

$\because$ 动点 D 在线段 BC 上移动(不与 B, C 重合),

$\therefore 0 < x < 1$,

$\because DE \perp OD$,

$\therefore OD^2 + DE^2 = OE^2$,

$\therefore x^2 + 1 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 + y^2$,

解得: $y = x^2 - x + 1$,

$\therefore 1 + y^2 = 1 + (x^2 - x + 1)^2 = 1 + \left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right]^2$,

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 线段 OE 取得最小值,

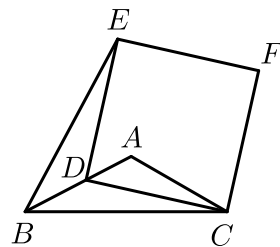
最小值为: $OE = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{5}{4} = 1.25$,

$\therefore AE = \sqrt{OE^2 - OA^2} = \frac{3}{4}$,

故选C.

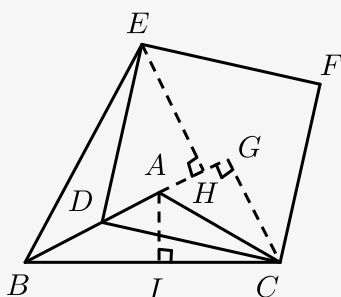
【标注】【知识点】正方形与平面直角坐标系综合

30. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5$, $BC = 4\sqrt{5}$, D 为边 AB 上一动点(不与点 B 重合), 以 CD 为一边作正方形 $CDEF$, 连接 BE , 则 $\triangle BDE$ 的面积的最大值为_____.



【答案】 8

【解析】 过点A作 $AI \perp BC$ ，垂足为I，
过点E作 $EH \perp BA$ ，垂足为H，
过点C作 $CG \perp BA$ ，垂足为G，



$\because BC = 4\sqrt{5}$ ，且 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，

$\therefore BI = CI = \frac{1}{2}BC = 2\sqrt{5}$ ，

$\therefore \angle AIB = \angle CGB = 90^\circ$ ，

$\angle ABI = \angle CBG$ ，

$\therefore \triangle AIB \sim \triangle CGB$ ，

$\therefore \frac{AB}{CB} = \frac{BI}{BG}$ ，
 $\frac{5}{4\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{BG}$ ，

$\therefore BG = 8$ ，

设 $BD = x$ ，则 $DG = 8 - x (0 < x \leq 5)$ ，

$\therefore \angle GDC + \angle HDE = 90^\circ$ ，

$\angle HDE + \angle HED = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle GDC = \angle HED$ ，

在 $\triangle EDH$ 与 $\triangle DCG$ 中，

$\begin{cases} \angle EHD = \angle DGC = 90^\circ \\ \angle HED = \angle GDC \\ ED = DC \end{cases}$ ，

$\therefore \triangle EDH \cong \triangle DCG (AAS)$ ，

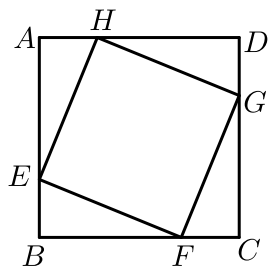
$\therefore EH = DG = 8 - x$ ，

$$\begin{aligned}
\therefore S_{\triangle BDE} &= \frac{1}{2}BD \cdot EH, \\
&= \frac{1}{2}x(8-x) \\
&= -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 8 (0 < x \leq 5), \\
\therefore \text{当 } x &= 4 \text{ 时, 即 } BD = 4, \\
\triangle BDE &\text{面积最大值为 } 8.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

过关斩将

31. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 8cm , E, F, G, H 分别是 AB, BC, CD, DA 上的动点, 且 $AE = BF = CG = DH$, 则四边形 $EFGH$ 面积的最小值是 cm^2 .



【答案】32

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ, AB = BC = CD = DA,$$

$$\therefore AE = BF = CG = DH,$$

$$\therefore AH = BE = CF = DG,$$

在 $\triangle AEH$, $\triangle BFE$, $\triangle CGF$ 和 $\triangle DHG$ 中,

$$\begin{cases}
AE = BF = CG = DH \\
\angle A = \angle B = \angle C = \angle D, \\
AH = BE = CF = DG
\end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEH \cong \triangle BFE \cong \triangle CGF \cong \triangle DHG (SAS),$$

$$\therefore EH = FE = GF = GH, \angle AEH = \angle BFE,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是菱形,

$$\therefore \angle BEF + \angle BFE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BEF + \angle AEH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HEF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是正方形,

设四边形 $EFGH$ 面积为 S , 设 $BE = x\text{cm}$, 则 $BF = (8-x)\text{cm}$,

根据勾股定理得, $EF^2 = BE^2 + BF^2 = x^2 + (8-x)^2$,

$$\therefore S = x^2 + (8-x)^2 = 2(x-4)^2 + 32,$$

$$\because 2 > 0,$$

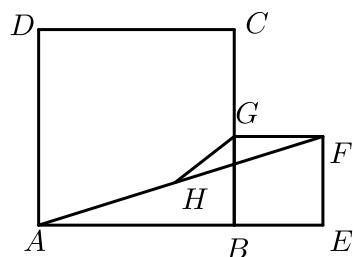
$\therefore S$ 有最小值,

当 $x = 4$ 时, S 的最小值 = 32,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 面积的最小值为 32cm^2 .

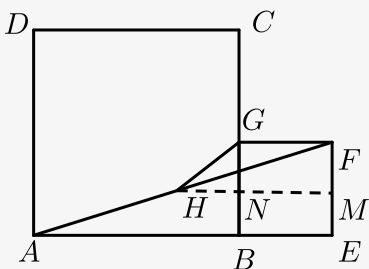
【标注】【知识点】正方形与全等综合

32. 如图, 正方形 $ABCD$ 边长为2, BC 边上有一动点 G , 以 BG 为边向外作正方形 $BEFG$, 连接 AF , H 为 AF 的中点, 连接 GH , 则 GH 的最小值为 _____.



【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】 取 EF 中点 M , 连 HM 交 BC 于 N ,



$\because H, M$ 分别为中点,

$$\therefore HM \parallel AE \parallel GF, HM \parallel EF, HM \parallel BC, HM = \frac{1}{2}AE,$$

设 $BE = 2a$, 则 $FM = ME = a$,

$$HM = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(2 + 2a) = a + 1, NM = 2a,$$

$$\therefore HN = HM - NM = a + 1 - 2a = 1 - a,$$

$$GH^2 = NH^2 + GN^2$$

$$= (1 - a)^2 + a^2$$

$$= 2a^2 - 2a + 1$$

$$= 2(a^2 - a) + 1$$

$$\begin{aligned}
&= 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}, \\
&\therefore \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \\
&\therefore 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}, \\
&\therefore GH^2 \geq \frac{1}{2}, \\
&\text{当 } a = \frac{1}{2} \text{ 时, } GH^2_{\min} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } GH_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】正方形的性质

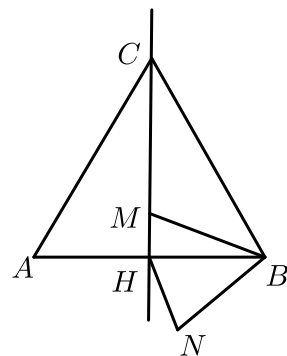
【知识点】勾股定理与实际问题

【能力】推理论证能力

7. 瓜豆原理

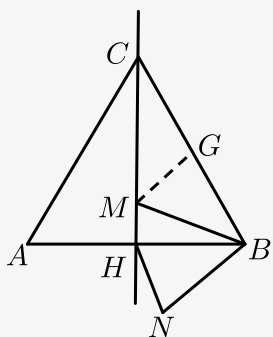
典题精练

33. 如图，在边长为 $2a$ 的等边 $\triangle ABC$ 中， M 是高 CH 所在直线上的一个动点，连接 BM ，将线段 BM 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 BN ，连接 HN ，则在点 M 运动的过程中，线段 HN 长度的最小值为 _____ .



【答案】 $\frac{a}{2}$

【解析】如图，取 BC 的中点 G ，连接 MG ，



$\therefore$ 旋转角是 60° ,
 $\therefore \angle MBH + \angle HBN = 60^\circ$,
 又 $\therefore \angle MBH + \angle MBC = \angle ABC = 60^\circ$,
 $\therefore \angle HBN = \angle GBM$,
 $\therefore CH$ 是等边 $\triangle ABC$ 的对称轴 ,
 $\therefore HB = \frac{1}{2}AB$,
 $\therefore HB = BG$,
 又 $\therefore BM$ 旋转至 BN ,
 $\therefore BM = BN$,
 在 $\triangle MBG$ 和 $\triangle NBH$ 中 ,

$$\begin{cases} BG = BH \\ \angle MBG = \angle NBH \\ MB = NB \end{cases}$$
 $\therefore \triangle MBG \cong \triangle NBH (\text{SAS})$,
 $\therefore MG = NH$,
 $\therefore$ 根据垂线段最短 , $MG \perp CH$ 时 , MG 最短 , 即 HN 最短 ,
 此时 $\therefore \angle BCH = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$, $CG = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 2a = a$,
 $\therefore MG = \frac{1}{2}CG = \frac{1}{2} \times a = \frac{a}{2}$,
 $\therefore HN = \frac{a}{2}$.

【标注】【思想】数形结合思想

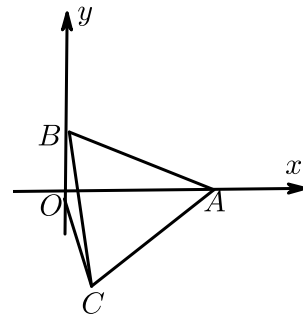
【能力】推理论证能力

【能力】运算能力

【知识点】垂线段最短

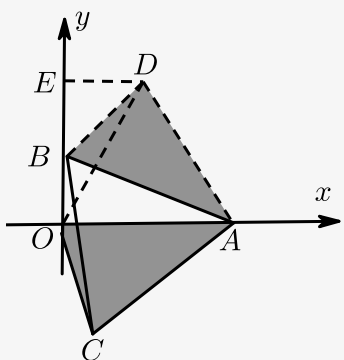
【知识点】SAS

34. 如图 , 在平面直角坐标系中 , 已知点 $A(4, 0)$, B 为 y 轴正半轴一动点 , 连接 AB , 以 AB 为一边向下作等边 $\triangle ABC$, 连接 OC , 则 OC 的最小值为 _____ .



【答案】2

【解析】以 OA 为边向上方作等边 $\triangle OAD$ (构造“双子型”), 连接 BD ,



显然有 $\triangle ADB \cong \triangle AOC$ (SAS), 则 $OC = BD$.

D 为定点, 动点 B 在 y 轴上, 根据“点到直线的距离, 垂线段最短”,

可知当 $DE \perp y$ 轴时(即 E, B 重合时),

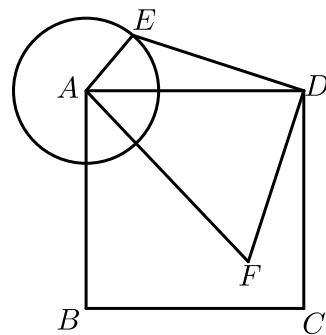
DB 最短, 此时 $DB = 2$. 故 OC 的最小值为2.

【标注】【知识点】SAS

【知识点】垂线段最短

【能力】推理论证能力

35. 如图, 已知正方形 $ABCD$ 的边长为3, 以点 A 为圆心, 1为半径作圆, E 是 $\odot A$ 上的任意一点, 将 DE 绕点 D 按逆时针旋转 90° , 得到 DF , 连接 AF , 则 AF 的最小值是 _____.



【答案】 $3\sqrt{2} - 1$

【解析】如图1, 连接 FC, AF ,

$\because ED \perp DF$,

$\therefore \angle EDF = \angle EDA + \angle ADF = 90^\circ$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AD = CD, \angle ADD = 90^\circ$,

∴

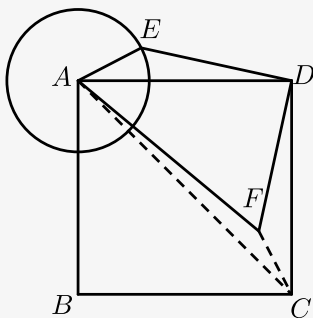


图 1

$$\angle ADF + \angle CDF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDA = \angle CDF,$$

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDF$ 中,

$$\therefore \begin{cases} AD = CD \\ \angle EDA = \angle FDC \\ ED = DF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDF,$$

$$\therefore CF = AE = 1,$$

$$\therefore AF > AC - CF, \text{ 即}$$

$$AF > AC - 1,$$

$$\therefore \text{当 } F \text{ 在 } AC \text{ 上时, } AF$$

最小,

如图2,

$$\therefore \text{正方形 } ABCD \text{ 的边长为 } 3,$$

$$\therefore AC = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore AF \text{ 的最小值是 } 3\sqrt{2} - 1.$$

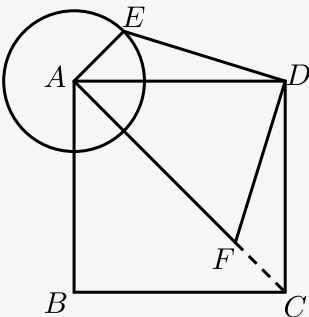
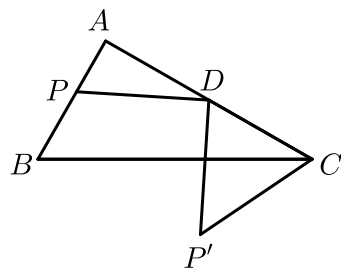


图 2

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

过关斩将

36. 如图所示, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = 3$, $AC = 4$, D 为 AC 中点, P 为 AB 上的动点, 将 P 绕点 D 逆时针旋转 90° 得到 P' , 连接 CP' , 则线段 CP' 的最小值为().



A. 1.6

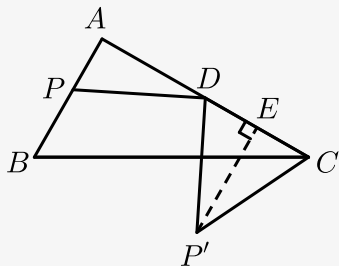
B. 2.4

C. 2

D. $2\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】如图所示，过 P' 作 $P'E \perp AC$ 于 E ，



则 $\angle A = \angle P'ED = 90^\circ$ ，

由旋转可得， $DP = P'D$ ， $\angle PDP' = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ADP = \angle EP'D$ ，

在 $\triangle DAP$ 和 $\triangle P'ED$ 中，

$$\begin{cases} \angle ADP = \angle EP'D \\ \angle A = \angle P'ED \\ DP = P'D \end{cases},$$

$\therefore \triangle DAP \cong \triangle P'ED (\text{AAS})$ ，

$\therefore P'E = AD = 2$ ，

$\therefore$ 当 $AP = DE = 2$ 时， $DE = DC$ ，即点 E 与点 C 重合，

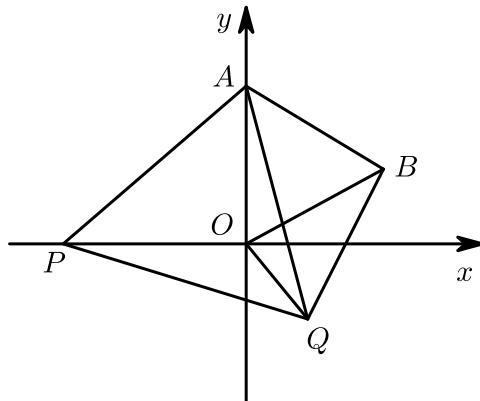
此时 $CP' = EP' = 2$ ，

$\therefore$ 线段 CP' 的最小值为2．

故选C．

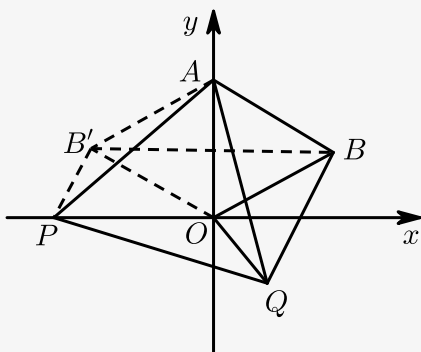
【标注】【知识点】旋转性质综合应用

37. 如图，在平面直角坐标系中，已知点 $A(0, 2)$ ， $\triangle AOB$ 是等边三角形．点 P 是 x 轴上一动点，以线段 AP 为一边，在其右侧作等边 $\triangle APQ$ ．在点 P 的运动过程中， OQ 的最小值为 _____ ．



【答案】1

【解析】作 B 关于 y 轴对称点 B' ，则 $\triangle OAB'$ 为等边三角形，



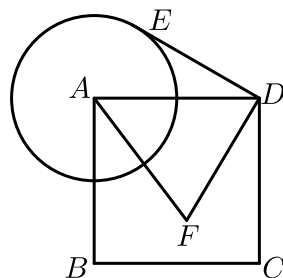
$\therefore \triangle AB'P \cong \triangle AOQ$ (SAS), $\therefore OQ = B'P$,

当 $B'P \perp x$ 轴时， $B'P = OQ$ 最小，此时 $OQ_{\min} = B'P_{\min} = 1$.

故答案为：1.

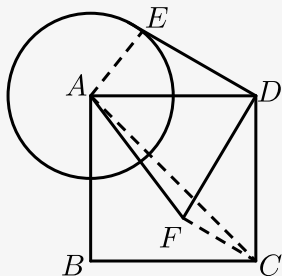
【标注】【知识点】垂线段最短

38. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为2，以点 A 为圆心，1为半径作圆， E 是 $\odot A$ 上的任意一点，将点 E 绕点 D 按逆时针方向旋转 90° 得到点 F ，则线段 AF 的长的最小值 _____.



【答案】 $2\sqrt{2} - 1$

【解析】如图，连接 FC ， AC ， AE 。



$\therefore ED \perp DF$,

$\therefore \angle EDF = \angle EDA + \angle ADF = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AD = CD$ ， $\angle ADC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ADF + \angle CDF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle EDA = \angle CDF$,
 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDF$ 中 ,

$$\therefore \begin{cases} AD = CD \\ \angle EDA = \angle FDC , \\ ED = DF \end{cases}$$

 $\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDF$ (SAS) ,
 $\therefore CP = AE = 1$,
 $\therefore$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 2 ,
 $\therefore AC = 2\sqrt{2}$,
 $\therefore AF \geq AC - CF$,
 $\therefore AF \geq 2\sqrt{2} - 1$,
 $\therefore AF$ 的最小值是 $2\sqrt{2} - 1$,
 故答案为 : $2\sqrt{2} - 1$.

【标注】【能力】分析和解决问题能力

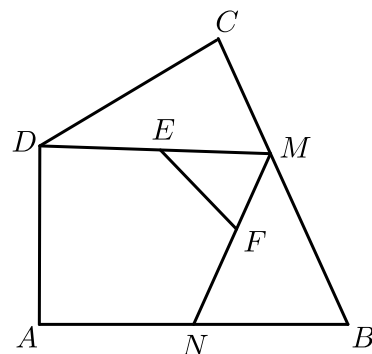
【知识点】正方形的性质

【知识点】旋转性质综合应用

【知识点】旋转的性质

8. 构造中位线

39. 如图 , 四边形 $ABCD$ 中 , $\angle A = 90^\circ$, $AB = 4$, $AD = 3$, 点 M 、 N 分别线段 BC 、 AB 上的动点 , (含端点 , 但点 M 不与点 B 重合) , 点 E 、 F 分别为 DM 、 MN 的中点 , 则 EF 长度的最大值为 _____ .



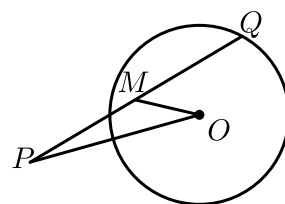
【答案】 2.5

【解析】 $\because ED = EM$, $MF = FN$,
 $\therefore EF = \frac{1}{2} DN$,

$\therefore DN$ 最大时, EF 最大,
 $\therefore$ 因为 N 与 B 重合时 DN 最大,
 此时 $DN = DB = \sqrt{AD^2 + AB^2} = 5$,
 $\therefore EF$ 的最大值为2.5.

【标注】【知识点】中位线定理及其应用

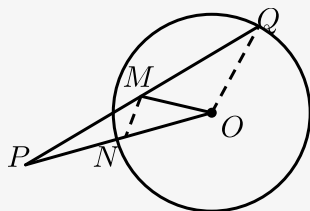
40. 如图, 已知 P 是 $\odot O$ 外一点, Q 是 $\odot O$ 上的动点, 线段 PQ 的中点为 M , 连接 OP , OM . 若 $\odot O$ 的半径为1, $OP = 2$, 则线段 OM 的最小值是 _____.



【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 取 OP 的中点 N , 连结 MN , OQ , 如图,

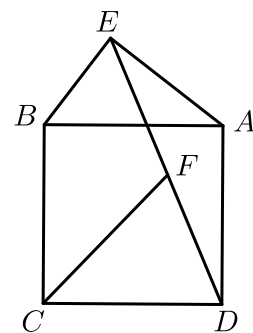
$\therefore M$ 为 PQ 的中点,
 $\therefore MN$ 为 $\triangle POQ$ 的中位线,
 $\therefore$



$MN = \frac{1}{2}OQ = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$,
 $\therefore$ 点 M 在以 N 为圆心, 1为半径的圆上,
 在 $\triangle OMN$ 中, $\frac{1}{2} < OM < \frac{3}{2}$,
 当点 M 在 ON 上时, OM 最小, 最小值为 $\frac{1}{2}$,
 $\therefore$ 线段 OM 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

【标注】【知识点】与圆有关的动点、轨迹问题

41. 如图, 边长为4的正方形 $ABCD$ 外有一点 E , $\angle AEB = 90^\circ$, F 为 DE 的中点; 连接 CF , 求 CF 的最大值.



【答案】 $\sqrt{13} + 1$.

【解析】 取 AB 的中点 G ，过点 G 作 $GN \perp CD$ 于点 N ，延长 DC 到点 M ，使 $CM = CD$ ，则 $MN = 6$ ， $GN = 4$ ， $\therefore GM = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$ ，又 $EG = \frac{1}{2}AB = 2$ ， $\therefore$ 在 $\triangle EMG$ 中， $EM \leq 2\sqrt{13} + 2$ ，而 $FC = \frac{1}{2}EM$ ，故 $FC \leq \sqrt{13} + 1$ ， $\therefore CF$ 的最大值是 $\sqrt{13} + 1$.

【标注】【知识点】动点与特殊平行四边形问题